Repaso primer módulo

¿Qué era efecto colateral? ¿Qué era transparencia referencial?
¿El efecto colateral, está asociado al lenguaje o al paradigma?
Los tipos, ¿están asociados al lenguaje o al paradigma?
Anotamos en el pizarrón:
El **paradigma** define si existe efecto colateral, si tiende a ser más declarativo/más imperativo.
El **lenguaje** puede ser tipado (es el compilador el que lo define, si soy estricto: chequeo estático; si no chequeo los tipos o los chequeo en runtime: chequeo dinámico).
¿Qué indica un dominio e imagen en un programa funcional? El rango de valores posibles que acepta como input y lo que devuelve como output.

Intro a Recursividad / Pattern matching

Mecanismos de iteración: Dentro de una función, ¿puedo tener una estructura de repetición?
Sí, gracias a la recursividad: *una función que se llama a sí misma*.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

Genéricamente:

$$n! \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n * (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

De hecho esta definición matemática la puedo pasar a Haskell:

<u>Una opción</u>: Definición por guardas

```
factorial n | n == 0     = 1
            | n > 0      = n * factorial (n - 1)
```

<u>Otra opción</u>: Definición por pattern matching

```
factorial 0  =  1
factorial n  =  n * factorial (n-1)
```

En (1) Cualquier valor entero "matchea" con n (si quiero evaluar factorial 3, la variable n se unifica con el valor 3). En (2) interviene el concepto de **pattern matching**: tratamos de hacer que encaje un determinado valor en una expresión:

- "factorial 3" no matchea con "factorial 0" (valor vs. valor),
- pero 3 sí encaja para n (valor vs. variable en el sentido matemático).

Observaciones: las guardas son excluyentes. Una vez que matcheé un patrón en una guarda, no puedo entrar en otra. Este tipo de pattern matching se llama "de secuencia", porque define un orden en el que se procesan las guardas de una función. Que haya un orden es toda una cuestión filosófica, que vamos a tratar en un par de clases.

¿De qué tipo es factorial?
Recibo un número, devuelvo otro número.
¿Qué tipo de número? Sólo enteros.
Entonces

```
Main> :t factorial
factorial :: Int -> Int
```

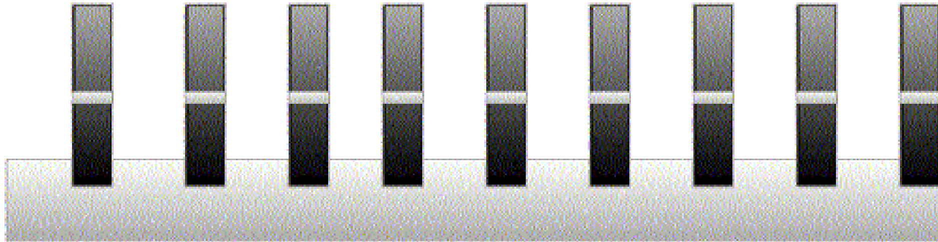
Recursividad e Inducción

El concepto de recursividad viene atado siempre al de **inducción:** defino P(0), y P(N + 1) en base a P(N). Por eso algunos autores prefieren esta versión del factorial:

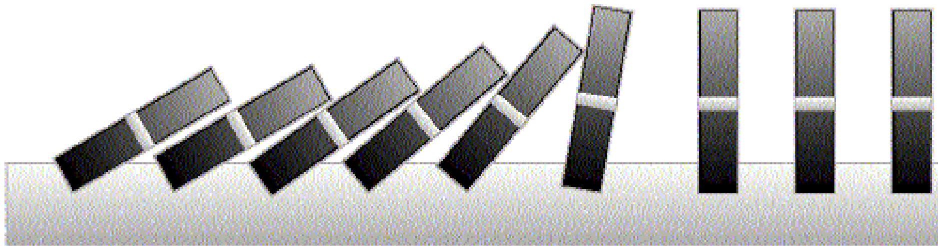
Tercera opción: (n + k) pattern matching.

```
factorial 0         =  1
factorial (n+1)     =  (n+1) * factorial n
```

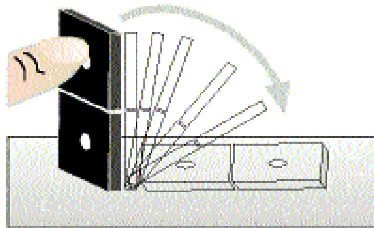
Inducción: metáfora asociada, Dominó



Nosotros sabemos que si tiramos un dominó, van a caer todos los sucesivos…



1) **Caso base:** Si presionamos un dominó en la parte de arriba, cae.



Entonces, tiramos un dominó. P(0) se cumple.

2) **Hipótesis:** Si el dominó es contiguo al que cae, caerá también.

3) **Demostración**

Si nos posicionamos en cualquier dominó P(N), P (N + 1) también caerá por estar contiguo a P(N), entonces probamos por inducción que todos los dominó van a caer[1].

Otra metáfora asociada a la inducción: la fila del cine, tenés la fila para sacar entrada y la fila para entrar a ver la película.

Llego yo, P(0) = “voy a sacar entrada al cine”

Hay un montón de gente haciendo cola, le pregunto al último: “¿es para sacar entrada para Avatar?”

[1] Metáfora extraída de http://www-static.cc.gatech.edu/~idris/AlgorithmsProject/ProofMethods/Induction/UnderstandingInduction.html

Si P(N) es verdadero, asumo que los demás también están sacando entrada para la misma película: P(N + 1) se cumple también.

Ahora, me interesa armar una función que sume los primeros n números.
[Dejar a la clase 10' a que lo resuelva, definiéndolo con guardas, por pattern matching común y (n + k) pattern matching]

```
sumarPrimerosN n | n == 0 = 0
                 | n >  0 = n + sumarPrimerosN (n - 1)
```

¿Qué tipo tiene la función? `Int -> Int`, nuevamente.

Un ejercicio más, armar una función que me devuelva si un número es primo o no. Matemáticamente, un número es primo si es divisible sólo por sí mismo y por uno. Esto lo podemos plantear recursivamente…
[que tiren ideas]
Acá empezamos a abrir la brecha entre imperativo y declarativo…

¿Cómo sería en procedural?

```
function esPrimo(n: integer): boolean
begin
   for i ← de 2 a (n - 1)
   begin
      if (mod(n, i) = 0)
      begin
         ↑ false;
      end;
   end;
   ↑ true;
end;
```

Pero acá no tengo variables para ir asignando destructivamente (no hay efecto colateral).

Volvamos entonces a la definición matemática de primo: "un número es primo si sólo es divisible por sí mismo y por uno". O sea: "un número es primo si no es divisible por todos los números que lo preceden". ¿Cuál es el rango de números que lo preceden?

Si tenemos un número n, los que lo preceden podrían ser 2, 3, 4… n – 2, n – 1

Entonces podríamos definir que todo número n es primo si no encuentro números divisores de n desde 2 hasta (n – 1).

```
primo n = noHayNumerosDivisoresDe n 2 (n - 1)

noHayNumerosDivisoresDe n minimo maximo
      | minimo >= maximo  = True
      | rem n minimo == 0 = False
      | otherwise         = noHayNumerosDivisoresDe n (minimo + 1) maximo
```

Podemos mejorar la expresividad de la función noHayNumerosDivisoresDe, si consideramos que
`rem n minimo == 0`
quiere decir que `n` es divisible por `minimo`.

O sea:

```
noHayNumerosDivisoresDe n minimo maximo
      | minimo >= maximo      = True
      | esDivisible n minimo = False
      | otherwise             = noHayNumerosDivisoresDe n (minimo + 1) maximo

esDivisible unNumero otroNumero = rem unNumero otroNumero == 0
```

Para transportar la definición matemática de número primo a Haskell, `primo` utiliza una función que está definida en forma recursiva, y que utiliza los parámetros para almacenar el contexto de ejecución o estado. Efectivamente `noHayNumerosDivisoresDe` necesita al menos dos valores:

- `n`: es el número que queremos verificar si tiene números divisores
- `minimo`: es el que toma valores diferentes (2, 3, 4… n – 2, n – 1). En la definición en pseudocódigo es el índice i.
- `maximo`: es n – 1 (podríamos no necesitarlo, dado que se puede obtener en función de n)

Anotamos entonces: una forma de almacenar estado es… ¡pasando valores como argumentos!

¿Cómo se guardaba el valor intermedio de factorial? En n * **factorial (n – 1)**

Todo muy lindo, pero… ¿quién labura?
El ***motor*** Haskell, que trabaja hasta que llega a una expresión irreductible:

```
primo 4 = noHayNumerosDivisoresDe 4 2 (4 - 1) = noHayNumerosDivisoresDe 4 2 3 =
False (porque esDivisible 4 2 devuelve True).

primo 5 = noHayNumerosDivisoresDe 5 2 (5 - 1) = noHayNumerosDivisoresDe 5 2 4 =
noHayNumerosDivisoresDe 5 3 4 = noHayNumerosDivisoresDe 5 4 4 =
True (porque minimo >= maximo, 4 >= 4 es True).
```

Recordemos que una vez que matcheé un patrón, no puedo entrar en otro.

Observación: Esta es la única vez que les contamos qué pasa abajo… el chiste de trabajar en forma declarativa es abstraerme de cómo se termina resolviendo y concentrarme en qué es lo que hay que hacer.

Busquemos dominio e imagen de la función:
`primo`: Recibimos un `Int`, devolvemos un `Bool`.
```
noHayNumerosDivisoresDe:: Int -> Int -> Int -> Bool
```